

Научная статья

УДК 631.214:519.8

EDN LAFFTS

<https://doi.org/10.22450/1999-6837-2025-19-3-78-83>

Математическая модель для анализа работы метантенка

Михаил Пурбаевич Таханов¹, Николай Вадимович Петров²

^{1, 2} Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова
Республика Саха (Якутия), Якутск, Россия

¹ takhanov93@mail.ru, ² petnikvad1988@mail.ru

Аннотация. В статье представлена математическая модель, разработанная на основе анализа физико-химических и биологических закономерностей, характерных для процессов преобразования органического вещества. Она учитывает ключевые параметры, такие как скорость разложения субстрата, объем выделяемого биогаза и время, необходимое для достижения максимального выхода продукта. Методологический подход основан на системном анализе, включающем последовательные этапы теоретического исследования, математического моделирования и экспериментальной верификации. Теоретический анализ базируется на детальном изучении процесса движения метаногенных микроорганизмов внутри метантенка при выработке биогаза. Ключевым параметром при этом является максимальный выход биогаза. В результате исследования научной литературы определены основные факторы, влияющие на процесс анаэробного сбраживания свиного навоза в метантенке. При этом особое внимание уделяется исследованию влияния кислотно-щелочного баланса на активность метаногенных микроорганизмов. Установлено, что отклонения показателя кислотности от оптимального значения приводят к существенному снижению скорости образования биогаза, что необходимо учитывать при проектировании биогазовых установок. Зависимости параметров выхода биогаза от указанных факторов позволяют сформулировать основные принципы процесса преобразования органического вещества.

Ключевые слова: анаэробное сбраживание, биогаз, метантенк, гидродинамические возмущения, субстрат, константа скорости сбраживания

Для цитирования: Таханов М. П., Петров Н. В. Математическая модель для анализа работы метантенка // Дальневосточный аграрный вестник. 2025. Том 19. № 3. С. 78–83.
<https://doi.org/10.22450/1999-6837-2025-19-3-78-83>.

Original article

Mathematical model for analyzing the operation of a methane tank

Mikhail P. Takhanov¹, Nikolay V. Petrov²

^{1, 2} North-Eastern Federal University named after M. K. Ammosov
Republic of Sakha (Yakutia), Yakutsk, Russian Federation

¹ takhanov93@mail.ru, ² petnikvad1988@mail.ru

Abstract. The authors present a mathematical model developed on the basis of physico-chemical and biological patterns of organic matter transformation processes. The model takes into account the rate of decomposition of the substrate, the volume of biogas released, and the time required to achieve maximum product yield. The methodological approach is based on a systematic analysis that includes the stages of theoretical research, mathematical modeling and experimental verification. The theoretical analysis is based on a detailed study of the movement of methanogenic microorganisms inside the methane tank during biogas production. The key parameter in this case is the maximum biogas output. As a result of the literature review, the main factors influencing the process of anaerobic digestion of pig manure in a methane tank have been

identified. It has been found that deviations of the acidity index from the optimal value lead to a significant decrease in the rate of biogas formation, which is important to take into account when designing biogas plants. The dependences of the biogas output parameters on these factors make it possible to formulate the basic principles of the organic matter transformation process.

Keywords: anaerobic fermentation, biogas, methane tank, hydrodynamic disturbances, substrate, fermentation rate constant

For citation: Takhanov M. P., Petrov N. V. Mathematical model for analyzing the operation of a methane tank. *Dal'nevostochnyi agrarnyi vestnik*. 2025;19;3:78–83. (in Russ.). <https://doi.org/10.22450/1999-6837-2024-19-3-78-83>.

Предложенная нами математическая модель разработана на основе анализа физико-химических и биологических закономерностей, характерных для процессов преобразования органического вещества. Она учитывает ключевые параметры, такие как скорость разложения субстрата, объем выделяемого биогаза и время, необходимое для достижения максимального выхода продукта [1, 2].

Материалы и методы исследований. Зависимости параметров выхода биогаза от указанных факторов позволяют сформулировать три основных принципа процесса преобразования органического вещества, показанных на рисунке 1.

Для математического описания процесса разработано дифференциальное уравнение, основанное на работах В. П. Дроздяновой с соавторами [3, 4] и ВРК-модели [5], наиболее точно описыва-

ющее динамику накопления биогаза в реакторе. Уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{dG}{dt} = \eta \cdot k_{br}(pH) \cdot (G_{max} \cdot G(t)) \quad (1)$$

где η – коэффициент, учитывающий эффективность гидровозмущения субстрата; $k_{br}(pH)$ – pH-зависимая константа скорости;

G_{max} – предельный выход газа для конкретного типа субстрата;

$G(t)$ – текущий объем биогаза.

Важно отметить, что значение коэффициента, учитывающего эффективность гидровозмущения субстрата (η), составляет 1,2. Оно было установлено в ходе серии предварительных экспериментов. Полученное значение подтверждает значительное влияние гидродинамики на интенсивность процесса.

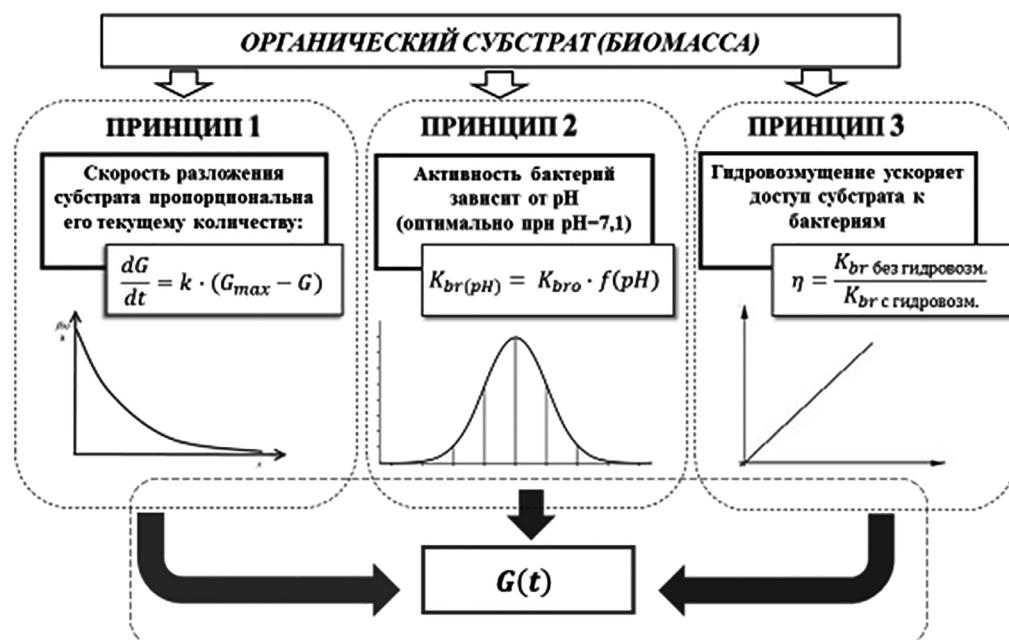


Рисунок 1 – Ключевые принципы для разработки математической модели

Figure 1 – Key principles for developing a mathematical model

В свою очередь, константа скорости от pH среды описывается функциональной зависимостью (2):

$$k_{br}(pH) = f \left(k_{bro}; \alpha(pH); f(pH); \frac{\bar{m}}{m_0} \right) \quad (2)$$

где $\alpha(pH)$ – корректирующий коэффициент, учитывающий влияние кислотности на скорость подачи субстрата.

Анализ данной зависимости показывает, что при значениях pH ниже 6,3 происходит резкое торможение процесса; в то время как в диапазоне от 6,8 до 7,2 наблюдается максимальная активность метаногенных бактерий.

Учитывая сложности поиска точных значений необходимых показателей в научной литературе, нами были проведены экспериментальные исследования для определения гидродинамических воздействий внутри метантенка.

Задачей разрабатываемой математической модели является формирование системы оптимизации, которая включает три ключевых критерия:

1. Максимальный выход биогаза ($G_{max} \rightarrow \max$).
2. Поддержание стабильности процесса ($\Delta pH \rightarrow \min$).
3. Снижение энергетических затрат ($E_{гидров} \rightarrow \min$).

Так как любая модель предусматривает ограничения или стремление к максимальным (оптимальным) значениям, для упрощения расчетов в инженерных приложениях применяется математический аппарат, включающий регрессионный анализ и методы оптимизации с несколькими критериями, в том числе аппроксимацию методом наименьших квадратов.

При этом ΔpH выступает ключевым параметром в модели, связывающим динамику поступления свежего органического материала (свиного навоза) с текущим уровнем кислотности в реакторе. Без учета данного коэффициента математическое моделирование процессов анаэробного сбраживания теряет физико-химическую достоверность.

Снижение энергетических затрат ($E_{гидров}$) производится за счет интенсификации процесса анаэробного сбраживания. В результате, экономия электроэнергии происходит с помощью получаемого биогаза, который идет на поддержание рабочей температуры в метантенке, что, в свою очередь, снижает затраты на электроэнергию до 90 %.

Результаты исследований и их обсуждение. На рисунке 2 представлена технологическая схема работы метантенка с ее ключевыми параметрами.

На основе этих параметров составим уравнение модели. Для этого примем, что

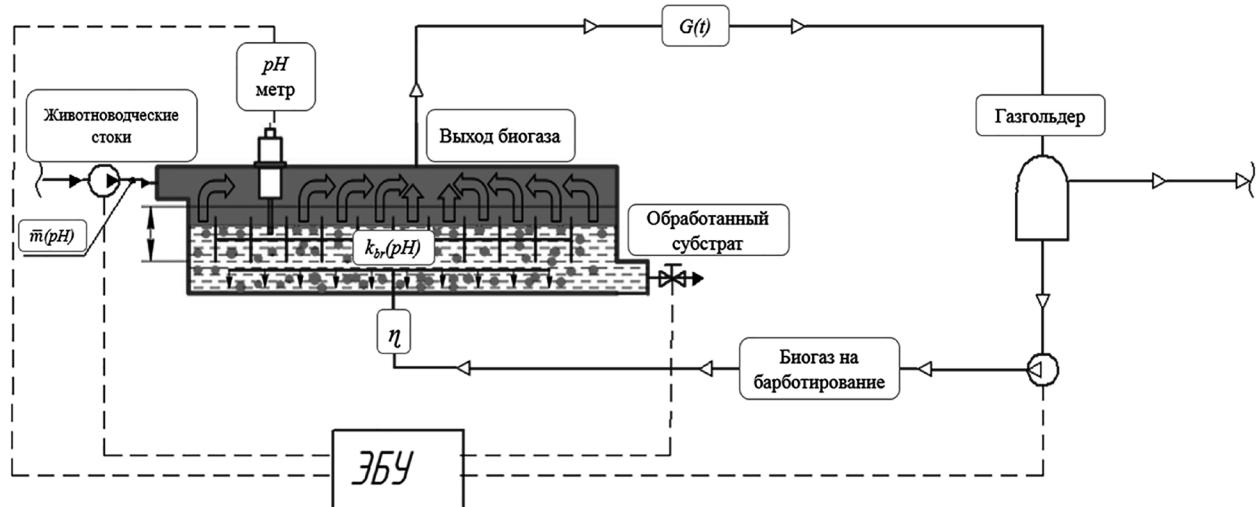


Рисунок 2 – Технологическая схема работы метантенка
Figure 2 – Technological scheme of a methane tank operation

скорость образования биогаза пропорциональна скорости разложения перерабатываемого субстрата. Пусть $G(t)$ – объем выделенного биогаза к моменту времени t , а G_{\max} – максимальный объем биогаза, который может быть получен из данного субстрата. Тогда скорость выделения биогаза можно описать дифференциальным уравнением (3):

$$\frac{dG}{dt} = \eta \cdot k_{br}(pH) \cdot (G_{\max} - G) \quad (3)$$

где η – коэффициент эффективности перемешивания ($\eta > 1$);

$k_{br}(pH)$ – константа скорости сбраживания, день^{-1} ;

G_{\max} – максимальный объем биогаза, который может быть получен из данного субстрата, м^3 ;

G – объем выделенного биогаза на текущий момент времени t , м^3 .

Разделим переменные и перенесем все члены, содержащие G , в левую часть, а dt – в правую часть:

$$\frac{dG}{G_{\max} - G} = \eta \cdot k_{br}(pH) \cdot dt$$

Проинтегрируем обе части уравнения (левую – по G , а правую – по t):

$$\int \frac{dG}{G_{\max} - G} = \int \eta \cdot k_{br}(pH) \cdot dt$$

Вычислим левый и правый интеграл:

$$\int \frac{dG}{G_{\max} - G} = -\ln|G_{\max} - G| + C_1$$

$$\int \eta \cdot k_{br}(pH) \cdot dt = \eta \cdot k_{br}(pH) \cdot t + C_2$$

В приведенных выражениях C_1 и C_2 выступают постоянными интегрирования.

Объединяя результаты интегрирования и константы:

$$-\ln|G_{\max} - G| = \eta \cdot k_{br}(pH) \cdot t + C$$

В данном выражении C представляет разность между C_2 и C_1 (константа интегрирования).

Убираем логарифм, для чего выполним умножение обеих частей выражения на минус единицу и возьмем экспоненту:

$$G_{\max} - G = e^{-\eta \cdot k_{br}(pH) \cdot t - C}$$

Определим постоянную интегрирования при $t = 0$, $G(0) = 0$ (в начальный момент биогаз еще не выделился). Подставим в уравнение:

$$G_{\max} - 0 = e^{-C}, \text{ откуда } e^{-C} = G_{\max}$$

Далее подставляем e^{-C} обратно в уравнение:

$$G_{\max} - G = G_{\max} \cdot e^{-\eta \cdot k_{br}(pH) \cdot t}$$

Выразим величину $G(t)$:

$$G(t) = G_{\max} \cdot (1 - e^{-\eta \cdot k_{br}(pH) \cdot t}) \quad (4)$$

Полученное таким образом уравнение (4) описывает изменение объема образуемого биогаза G с течением времени t .

Для применения данной математической модели к предложенной конструкции метантенка необходимо определить максимальный объем биогаза (G_{\max}), так как любая модель предусматривает ограничения или стремление к максимальным (оптимальным) значениям. В свою очередь, G_{\max} зависит от концентрации органических веществ в субстрате, которые могут быть разложены метаногенными микроорганизмами.

В этой связи известна следующая формула для расчета теоретически максимального выхода биогаза [6, 7]:

$$G_{\max} = m \cdot COB \cdot B_0 \quad (5)$$

где m – масса субстрата, кг;

COB – содержание органического вещества в субстрате, доли единицы;

B_0 – удельный выход биогаза для данного типа органического вещества, $\text{м}^3/\text{кг}$.

Заключение. Разработанная математическая модель изменения объема образуемого биогаза с течением времени позволяет прогнозировать производительность метантенка и оптимизировать его режим работы по параметрам оптимальной кислотности и образования биогаза. Это существенно повышает эффективность работы биогазовых установок за счет нескольких ключевых факторов:

1. Обеспечение автоматической оптимизации нагрузки на реактор с предотвращением как перегрузки системы, так и ее недогрузки.

2. Надежная защита установки от кислотных сбоев, которые являются основной причиной остановки технологического процесса.

3. Максимизация выхода биогаза с увеличением производительности на 15–

20 % по сравнению с обычными методами управления.

Формула (4) не требует сложных вычислений и может быть легко интегрирована в существующие системы автоматизированного управления технологическими процессами. При этом модель сохраняет достаточную гибкость для адаптации к конкретным условиям эксплуатации и типам используемого сырья.

Список источников

1. Патент № 2678673 С1. Российская Федерация. Установка для анаэробного сбраживания : № 2017132640 : заявл. 18.09.2017 : опубл. 30.01.2019 / Таханов М. П., Васильев Ф. А., Ильин С. Н., Евтеев В. К. Бюл. № 4. 8 с.
2. Таханов М. П., Васильев Ф. А. Создание возмущений в метантенке // Вестник Иркутской государственной сельскохозяйственной академии. 2017. Вып. 80. С. 143–148. EDN ZFHRRN.
3. Друзьянова В. П., Петрова С. А. Технология производства биогаза из органического сырья в условиях Якутии : монография. М. : Научное обозрение, 2014. 171 с.
4. Друзьянова В. П. Параметры, характеризующие энергетическую сторону процесса анаэробного сбраживания в накопительной биоэнергетической установке // Проблемы и перспективы подготовки специалистов для промышленно-хозяйственного комплекса : материалы республиканской науч.-практ. конф. Якутск, 2004. С. 78–81.
5. Anaerobic digestion model No. 1 (ADM 1) by IWA Task Group for Mathematical Modelling of Anaerobic Digestion Processes. IWA Publishing, 2005. <https://doi.org/10.2166/9781780403052>.
6. Ковалев А. А., Ножевникова А. Н. Технологические линии утилизации отходов животноводства в биогаз и удобрения. М. : Знание, 1990.
7. Рекомендации по расчету образования биогаза и выбору систем дегазации полигонов захоронения твердых бытовых отходов. Пермь : Пермский государственный университет, 2003. 19 с.

References

1. Takhanov M. P., Vasiliev F. A., Ilyin S. N., Evteev V. K. Anaerobic digestion plant. Patent RF, No. 2678673. [patents.google.com](https://patents.google.com/patent/RU2678673C1/ru) 2019 Retrieved from <https://patents.google.com/patent/RU2678673C1/ru> (Accessed 20 May 2025) (in Russ.).
2. Takhanov M. P., Vasiliev F. A. Creation of perturbations in a methane tank. *Vestnik Irkutskoi gosudarstvennoi sel'skokhozyaistvennoi akademii*, 2017;80:143–148. EDN ZFHRRN (in Russ.).
3. Druzyanova V. P., Petrova S. A. *Technology of biogas production from organic raw materials in Yakutia: monograph*, Moscow, Nauchnoe obozrenie, 2014, 171 p. (in Russ.).
4. Druzyanova V. P. Parameters characterizing the energy side of the anaerobic digestion process in a bioenergy storage plant. Proceedings from Problems and prospects of training specialists for the industrial and economic complex: *Respublikanskaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya*. (PP. 78–81), Yakutsk, 2004 (in Russ.).
5. Anaerobic digestion model No. 1 (ADM 1) by IWA Task Group for Mathematical Modelling of Anaerobic Digestion Processes, IWA Publishing, 2005. <https://doi.org/10.2166/9781780403052>.

6. Kovalev A. A., Nozhevnikova A. N. *Technological lines for recycling livestock waste into biogas and fertilizers*, Moscow, Znanie, 1990 (in Russ.).

7. *Recommendations on the calculation of biogas generation and the selection of degassing systems for landfills of solid household waste*, Perm', Permskii gosudarstvennyi universitet, 2003, 19 p. (in Russ.).

© Таханов М. П., Петров Н. В., 2025

Статья поступила в редакцию 19.08.2025; одобрена после рецензирования 12.09.2025; принята к публикации 15.09.2025.

The article was submitted 19.08.2025; approved after reviewing 12.09.2025; accepted for publication 15.09.2025.

Информация об авторах

Таханов Михаил Пурбаевич, старший преподаватель кафедры эксплуатации автомобильного транспорта и автосервиса, Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова, takhanov93@mail.ru;

Петров Николай Вадимович, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры эксплуатации автомобильного транспорта и автосервиса, Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова, ORCID: 0000-0002-8927-7828, Author ID: 904371, petnikvad1988@mail.ru

Information about the authors

Mikhail P. Takhanov, Senior Lecturer of the Department of Operation of Motor Transport and Auto Repair, North-Eastern Federal University named after M. K. Ammosov, takhanov93@mail.ru;

Nikolay V. Petrov, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Operation of Motor Transport and Auto Repair, North-Eastern Federal University named after M. K. Ammosov, ORCID: 0000-0002-8927-7828, Author ID: 904371, petnikvad1988@mail.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.

The authors declare no conflicts of interests.